Rakam: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Her rakam bir sayıdır, fakat her sayı bir rakam değildir.

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1 rakamlar değil sayılardır.

Doğal Sayılar: $\mathbb{N}$

N = {0, 1, 2, 3, ...n..} doğal sayılar kümesidir.

N^+ = {1, 2, 3, ...n..} pozitif doğal sayılar veya sayma sayılar kümesidir.

Tam Sayılar: $\mathbb{Z}$

Z = {.......... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Z^+ = {1, 2, 3, 4, ...n...} pozitif tamsayılar kümesidir.

Z^- = {..n....-4, -3, -2, -1} negatif tamsayılar kümesidir.

- {0} tamsayıdır ama işareti yoktur ve çift sayıdır.
- $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$

Rasyonel Sayılar: $\mathbb{Q}$

$a, b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ ye rasyonel sayı denir.

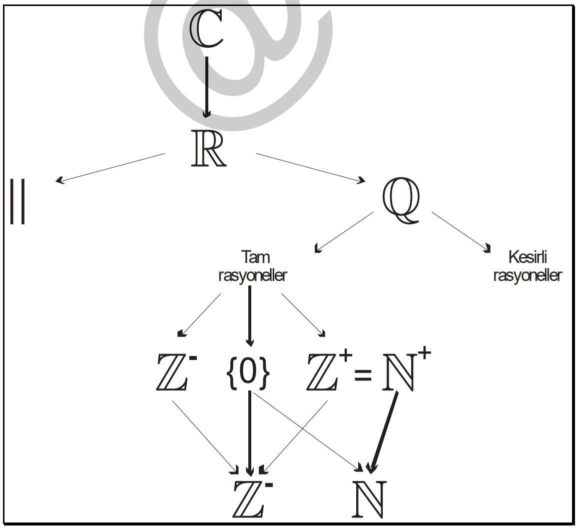
$Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ ve } b \neq 0\}$

İrrasyonel Sayılar: ||

Rasyonel sayı biçiminde yazılamayan irrasyonel sayılar denir. (π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ...)

Reel (Gerçel) Sayılar: $\mathbb{R}$

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden elde edilen sayılar kümesine denir. Doğal, Sayma, Tam, Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar kümesi bu kümenin alt kümeleridir.



Sayıların Çözümlenmesi

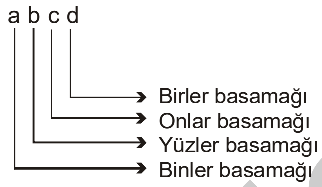
Basamak: Bir doğal sayının basamak sayısı rakamları kadardır.

Taban: $A = (abcd)_x = ax^3 + bx^2 + cx + dx^0$ ise A sayısı x tabanına göre yazılmıştır.

$ab = 10a + b$

$abc = 100a + 10b + c$

$abcd = 10^3 a + 10^2 b + 10c + d$



* Bir A doğal sayısının x ler basamağı k kadar artar ya da azalırsa, A doğal sayısı da k.x kadar artar ya da azalır.

Basamak Sayısı: A n basamaklı bir doğal sayı ve $m \in N$ olmak üzere, $A.10^m$ sayısı n+m basamaklıdır.

* A birler basamağı 0 olmayan bir doğal sayı ve $m \in N$ olmak üzere, $B = A.10^m$ sayısının sondan m tane basamağı 0 dır.

Asal Sayılar

1 ve kendisinden başka hiçbir sayıya bölünemeyen 1 den büyük pozitif tamsayılara asal sayı denir.

Pozitif bölen sayısı iki olan pozitif tamsayılara asal sayı denir.

{2, 3, 5, 7, 11, 13, …} kümesinin elemanları birer asal sayıdır.

- Çift olan tek asal sayı ve en küçük asal sayı 2 dir.
- Negatif sayılar asal olamaz.
- Asal sayılar sonsuz tanedir.

Aralarında Asal: Birden başka ortak böleni olmayan doğal sayılardır. 3 ve 8, 4 ve 9, 12 ve 35, 1 ve 5 ....

Asal Çarpanlara Ayırma

(x, y, z asal sayı)

$\boxed{A = x^a.y^b.z^c}$

işlemine A sayısını asal çarpanlarına ayırma denir.

Bir Sayının Bölenlerinin Sayısı

$A = x^a.y^b.z^c$ olmak üzere

➢ A sayısının pozitif tam bölen sayısı (negatif tamsayı bölenleri sayısı): $\boxed{(a+1).(b+1).(c+1)}$ dir.

➢ A sayısının 2 dışındaki asal çarpanlarının üslerini kullanarak A nın tek pozitif tam bölen sayısını buluruz.

➢ A nın tüm bölenleri sayısı: $\boxed{2.(a+1).(b+1).(c+1)}$ dir.

➢ A nın asal bölenleri sayısı: 3 tür (x, y, z)

➢ A sayısının pozitif tam bölen toplamı:

$$\boxed{\left(x^0+x^1+x^2+....+x^a\right).\left(y^0+y^1+....+y^b\right)\left(z^0+...+z^c\right)}$$

veya

$$\boxed{\frac{1-x^{a+1}}{1-x}.\frac{1-y^{b+1}}{1-y}.\frac{1-z^{c+1}}{1-z}}$$ dir.

➢ Bir sayının tam bölen toplamı daima 0'dır.

➢ A sayısının asal olmayan tamsayı bölenleri toplamı:

$$\boxed{-(x+y+z)}$$

Not:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^k.a^n = a^{k+n} \\ a^k.b^k = (a.b)^k \end{array}}$$

Faktöriyel:

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve n! biçiminde gösterilir.

n! = 1.2.3. … n dir.

0! = 1 olarak tanımlanır.

1! = 1

2! = 2.1 = 2

3! = 3.2.1 = 6

4! = 4.3.2.1 = 24

5! = 5.4.3.2.1 = 120

$6! = 6.\underbrace{5.4.3.2.1}_{5!} = 6.5!$

7! = 7.6! = 7.6.5! şeklinde yazılabildiği kolayca görülür.

$\boxed{n! = n(n-1)!}$

- ➢ 5! ve 5! den büyük bütün faktöriyellerin birler basamağı sıfırdır.
- ➢ 0! ve 1! hariç bütün faktöriyellerin sonuçları çift sayıdır.
- ➢ Negatif sayıların faktöriyelleri tanımsızdır.
- ➢ Herhangi bir faktöriyel kendisinden küçük tam faktöriyellerin katıdır.

Ardışık Sayılar

Belirli bir kurala göre artan veya azalan sayılara ardışık sayılar denir.

n bir tamsayı olmak üzere

Ardışık tam sayılar … n – 1, n, n + 1, n + 2, …

Ardışık tek ve çift tam sayılar … n – 2, n, n + 2, …

- ➢ Ardışık tek ve çift sayılar arasındaki fark 2 dir.
- ➢ Sayı adedi tek ise baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayıya **ortanca sayı** denir.

"Ardışık tam sayılara dizi de denir."

$$\overset{3}{\frown}\quad\overset{3}{\frown}\quad\overset{3}{\frown}\quad\overset{3}{\frown}$$
$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ ...,\ 40$$

ilk terim … son terim

Terim Sayısı ve Toplam:

$x_1+x_2+x_3+.....+x_n$ toplamında ardışık terimler arasındaki fark sabit olmak üzere

$$\boxed{\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Ortak Fark}} + 1}$$

$$\boxed{\text{Toplam} = \frac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2}.\text{Terim Sayısı}}$$

Not:

$$\boxed{1+2+3+......+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{2+4+6+...+n = n(n+1)}$$

$$\boxed{1+3+5+...(2n-1) = n^2}$$

Tek ve Çift Sayılar

Tek sayılar: .....-3, -1, 1, 3, ...2n-1,.....

T = { x : x = 2n-1, n∈Z }

Çift sayılar: ......-4, -2, 0, 2, 4, ...2n,......

Ç = { x : x = 2n, n∈Z }

Bir sayının 2 ile bölümünden kalan 1 ise tek, 0 ise çifttir.

$$\boxed{\begin{array}{l} T \pm T = Ç \\ T \pm Ç = T \\ Ç \pm Ç = Ç \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} T.T = T \\ T.Ç = Ç \\ Ç.Ç = Ç \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} T^n = T \quad (n \in N) \\ Ç^n = Ç \quad (n \in N^+) \end{array}}$$

Pozitif ve Negatif Sayılar

Sıfırdan büyük sayılara pozitif sayılar, sıfırdan küçük sayılara negatif sayılar denir.

Pozitif (+), Negatif (–) sayıların çarpımı;

(+) . (+) = (+)

(+) . (–) = (–)

(–) . (+) = (–)

(–) . (–) = (+)

şeklindedir.

<u>Bu kural bölme için de geçerlidir.</u>

n bir tamsayı olmak üzere

$$(-)^n = \begin{cases} n \text{ çift sayı ise sonuç pozitif} \\ n \text{ tek sayı ise sonuç negatif} \end{cases}$$

$a^{2n+1} > 0$ ise $a > 0$

$a^{2n+1} < 0$ ise $a < 0$

$a^{2n} > 0$ ise a nın işareti belli değildir.

Bölme:

A: Bölünen

B: Bölen

C: Bölüm

K: Kalan

$$\begin{array}{r|l} A & \underline{\;B\;} \\ - & C \\ \hline K & \end{array}$$

i) A = B.C+K

ii) K<B

iii) K=0 ise tam bölüm

iv) K <C ise

$$\begin{array}{r|l} A & \underline{\;C\;} \\ - & B \\ \hline K & \end{array}$$

dır.

Bölünebilme Kuralları

- **2 ile bölünme**: Birler basamağı çift sayı olmalıdır.
- **3 ile bölünme**: Rakamları toplamı 3'ün katı olmalıdır. Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, o sayının rakamlarının toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.
- **4 ile bölünme:** Son iki rakamın oluşturduğu sayı 4'ün katı veya 00 olmalıdır.
- **5 ile bölünme:** Birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır. Bir sayının 5 ile bölümünden kalan birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.
- **6 ile bölünme**: 2 ve 3 ile tam bölünebilmelidir.
- **8 ile bölünme**: Son üç rakamın oluşturduğu sayı 8'in katı veya 000 olmalıdır.
- **9 ile bölünme:** Rakamları toplamı 9'un katı olmalıdır. Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamlarının toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.
- **10 ile bölünme**: Birler basamağı 0 olmalıdır. Bir sayının 10 ile bölümünden kalan birler basamağındaki rakama eşittir.
- **11 ile bölünme**: abcdefg=A
  (a+c+e+g)-(b+d+f)=0 veya 11.k ise A sayısı 11 ile tam bölünür.
- **7 ile bölünme:** $(n+1)$ basamaklı $a_na_{n-1}.....a_4a_3a_2a_1a_0$ sayısının 7 ile tam bölünebilmesi için, k∈Z olmak üzere;

$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + ... = 7k$ olmalıdır.

$a_na_{n-1}.....a_4a_3a_2a_1a_0$ sayısının 7 ile bölümünden kalan

$(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + ...$ işleminin sonucunun

7 ile bölümünden kalana eşittir.

Bir başka şekilde abcdefgh sayısının 7 ile bölünebilmesi için;

$$\begin{array}{c} \overbrace{a\,b}^{+}\,\overbrace{c\,d\,e}^{-}\,\overbrace{f\,g\,h}^{+} \\ 3\;1\;2\;3\;1\;2\;3\;1 \end{array}$$

7k = (3a + b) – (2c + 3d + e) + (2f + 3g + h) olmalıdır.

- Aralarında asal iki sayıya bölünebilen bir sayı bu iki sayının çarpımına da tam bölünür.
  (Bir sayı hem a ile hem de b ile bölünüyorsa bu ikisinin Okek i ile de bölünür.)

- 2 ve 3 ile tam bölünen sayılar 6 ile de tam bölünür.
- 3 ve 4 ile tam bölünen sayılar 12 ile de tam bölünür.

A sayısının **x** ile bölümünden kalan **p**
B sayısının **x** ile bölümünden kalan **q** ise
A+B nin **x** ile bölümünden kalan **p+q**
A.B nin **x** ile bölümünden kalan **p.q** dur. Yani kalanlar yerine konularak işlem yapılır.

OBEB – OKEK

Ortak Katların En Küçüğü (OKEK)

İki ya da daha fazla doğal sayının ortak katı olan doğal sayılardan en küçüğüne, bu sayıların ortak katlarının en küçüğü **(OKEK)** denir.

Ortak Bölenlerin En Büyüğü (OBEB)
İki ya da daha fazla doğal sayının her birini tam bölen sayıların en büyüğüne, bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü **(OBEB)** denir.

40 ve 180 sayılarının OBEB ve OKEK'ini bulalım.

40	180	2*
20	90	2*
10	45	2
5	45	3
5	15	3
5	5	5*
1	1	

İki sayının ortak bölenlerinin yanına (*) işareti konmuştur.

OBEB = yanında (*) işareti bulunan sayıların çarpımı
OKEK = tüm sayıların çarpımı

$\text{OBEB}(40,180) = 2^2.5 = 20$

$\text{OKEK}(40,180) = 2^3.3^2.5 = 360$

OBEB ve OKEK bulunurken sayılar önce asal çarpanlarına ayrılır.

OBEB: Ortak asal çarpanların en küçük üslüleri alınıp çarpılır.

OKEK: Ortak asal çarpanların en büyük üsleri ve ortak olmayan diğer çarpanlar alınıp çarpılır.

$40 = 2^3.5$

$180 = 2^2.3^2.5$

$\text{Obeb}(40,180) = 2^2.5 = 20$

$\text{Okek}(40,180) = 2^3.3^2.5 = 360$

- A ve B aralarında asal iki doğal sayı ise,

  OKEK (A, B) = A.B dir.

- A ve B doğal sayıları için A < B ise,

  OBEB (A, B) $\leq$ A < B $\leq$ OKEK (A, B) dir.

- A ve B doğal sayıları için

  A.B = OBEB (A, B) . OKEK (A, B) dir.

- Karşımıza çıkan OBEB ve OKEK problemlerinde küçük parçalardan büyük parçalar oluşturuluyorsa OKEK; büyükten eşit ve küçük parçalar oluşturuluyorsa OBEB kullanılır.

Rasyonel Sayılar

a, b $\in$ Z ve b $\neq$ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel sayı denir ve Q ile gösterilir.

$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a,b \in Z,\ b \neq 0 \right\}$ dır.

a ya rasyonel sayının **payı,** b ye ise **rasyonel sayının paydası** adı verilir.

$-\frac{8}{23}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 2, \frac{5}{11}, \frac{42}{15}$ gibi

Basit Kesir

Payı paydasından mutlak değerce küçük olan kesirlere denir.

$\frac{a}{b}$ kesrinde $|a| < |b|$ dır.

$-\frac{3}{7}, -\frac{41}{85}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{44}$ gibi.

Eğer $\frac{a}{b}$ basit kesir ise, (0 < a < b)

$\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > ..... > \left(\frac{a}{b}\right)^n ...\left(n \in N^+\right)$ dir.

Pozitif basit kesir: 0 ile 1 arasındaki kesirlere denir.

$0 < \frac{a}{b} < 1$

Negatif basit kesir: –1 ile 0 arasındaki kesirlere denir.

$-1 < \frac{a}{b} < 0$

➢ Payı ile paydası arasındaki farkı aynı olan pozitif basit kesirlerden payı en büyük olan 1 sayısına en yakındır. (En büyüğüdür.)

Bileşik Kesir

Payı paydasından mutlak değerce büyük veya payı paydasına eşit olan kesirlere **bileşik kesir** denir.

$\frac{a}{b}$ kesrinde; $|a| \geq |b|$ dır.

$-\frac{15}{2}, -20, \frac{9}{2}, \frac{13}{5}, 1$ gibi.

Eğer $\frac{a}{b}$ bileşik kesir ise, (0 < b < a)

$\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \ldots < \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(n \in N^+\right)$ dir.

➢ 0 basit kesir diğer tamsayılar bileşik kesirdir.

Tamsayılı Kesir

Sıfır hariç bir tam sayı ve basit kesir ile birlikte yazılan rasyonel sayılara **tam sayılı kesir** denir.

$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$ veya $-a\frac{b}{c} = -a - \frac{b}{c}$ dir.

Bileşik kesirleri tamsayılı basit kesir halinde yazabiliriz.

$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$; $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ gibi.

Genişletme ve Sadeleştirme

$\frac{a}{b}$ kesrinin pay ve paydası sıfırdan farklı bir k tam sayısıyla, çarpıldığında veya bölündüğünde kesrin değeri değişmez. Bu işleme **kesrin genişletilmesi** veya **sadeleştirilmesi** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, $k \neq 0$ (kesrin genişletilmesi)

$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$, $k \neq 0$ (kesrin sadeleştirilmesi)

Denk Kesirler

$\frac{a}{b}$ kesrinin genişletilmesi veya sadeleştirilmesi $\frac{a}{b}$ ye eşit pek çok kesir elde edilebilir. Bu kesirler $\frac{a}{b}$ ye **denktir** denir.

$\frac{a}{b}$ kesri, $\frac{c}{d}$ kesrine denk ise

$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ biçiminde yazılır, “a bölü b kesri c bölü d kesrine denktir” diye okunur.

Her denk kesir aynı zamanda eşittir. Buna göre $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ ise, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise, a · d = b · c dir.

Toplama – Çıkarma

Öncelikle paydalar eşit değil ise eşitlenir. Sonra paylar arasında işlem yapılır. Payda ortak olarak aynen yazılır.

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \text{ için } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

Çarpma

Paylar çarpılır paya, paydalar çarpılır paydaya yazılır.

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Bölme

Birinci kesir aynen yazılır, ikinci kesir ters çevrilip çarpma işlemi yapılır.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

➢ Rasyonel sayı problemlerinde işlem sırası:

1. Kuvvet alınır. (varsa)
2. Parantezin içi (varsa)
3. Çarpma, bölme
4. Toplama, çıkarmadır.

Rasyonel Sayılarda Sıralama

Aşağıdaki yöntemler pozitif rasyonel sayılarda sıralama için geçerlidir, negatif rasyonel sayılar sıralanırken önce pozitifmiş gibi sıralanıp sonra eşitsizlik yön değiştirilir.

Eşitleme Metodu

a. Paylar eşitlenirse paydası küçük olan kesir daha büyüktür.

$\frac{6}{17} < \frac{6}{13} < \frac{6}{10}$ gibi.

b. Paydalar eşitlenirse payı büyük olan kesir daha büyüktür.

$\frac{7}{12} < \frac{9}{12} < \frac{11}{12}$ gibi.

Fark Metodu

Pay ile payda arasındaki fark eşit ise;

a. Basit kesirlerde payı küçük olan kesir daha küçüktür.

b. Bileşik kesirlerde payı küçük olan kesir daha büyüktür.

$\frac{23}{28} < \frac{30}{35} < \frac{32}{37}$ gibi veya $\frac{24}{21} < \frac{18}{15} < \frac{15}{12}$ gibi

Arada Olma

İki rasyonel sayı arasında çok sayıda (sınırsız sayıda) rasyonel sayı vardır. Ancak bu sayılar sayı ekseni tamamen doldurmaz. Çünkü sayı doğrusunda görüntüsü olduğu halde rasyonel olmayan sayılar vardır.

$\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d} \in Q$ için,

$\frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d}$ olacak biçimde en az bir rasyonel sayı vardır.

Sonsuz Merdivenli İşlemler

Sonsuz merdivenli işlemlerde ikinci tekrardan itibaren bilinmeyen olarak düşünülür. İşlemde aynı bilinmeyene eşitlenerek sonuç bulunur.

➢ a ile b ardışık iki sayma sayısı ise;

i) $a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots}}} = \max(a,b)$

ii) $a - \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{\ddots}}} = \min(a,b)$

Ondalık Sayılar

Paydası 10'un kuvvetleri biçiminde olan (veya bu şekle getirilebilen) kesirlere **ondalık kesir** denir. Bir ondalık kesrin virgülden önceki kısmına **tam kısmı,** virgülden sonraki kısmına **ondalık kısmı** denir.

$\underbrace{ab}_{\text{Tam kısım}} , \underbrace{cde}_{\text{Ondalıklı kısım}}$

ONDALIK AÇILIM

$\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının payının paydasına bölümünden elde edilen bölüme rasyonel sayının ondalık açılımı denir.

$\frac{1}{5} = 0,2;\ \ \frac{1}{4} = 0,25$ gibi

➢ Her rasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır. Her ondalık sayıda bir rasyonel sayı belirtir.

Ondalık Kesirlerde Çözümleme

Bir ondalık kesri basamak değerlerinin toplamı biçiminde ifade etmeye ondalık kesri çözümleme denir.

43,527 sayısını çözümleyelim:

4 3, 5 2 7

Onlar basamağı ← 4
Birler basamağı ← 3
5 → Onda birler basamağı
2 → Yüzde birler basamağı
7 → Binde birler basamağı

$43,527 = 4.10 + 3.1 + 5.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{100} + 7.\frac{1}{1000}$

şeklinde çözümlenir.

Bir ondalıklı sayının, kesir kısmının sonuna yazılacak sıfırlar bu ondalık kesrin değerini değiştirmez.

$4,28 = 4,2800 = 4,28000\ldots$ gibi.

Devirli Ondalık Sayı

Ondalık biçimde yazılan bir rasyonel sayının ondalık kısmındaki rakamlar belli bir biçimde tekrarlanıyor ise bu sayıya **devirli ondalık sayı** denir.

$0,88888\ldots = 0,\overline{8}$ dir.

➢ Her rasyonel sayı devirli bir ondalık sayı biçiminde, her devirli ondalık sayı rasyonel sayı biçiminde yazılabilir.

Devirli Sayının Rasyonel Sayı Biçiminde Yazılması

$$\boxed{\text{Devirli sayı} = \dfrac{(\text{Sayının tamamı}) - (\text{Devretmeyen kısım})}{\begin{array}{c}\text{Virgülden sonra devreden rakam kadar}\\ \text{9, devretmeyen rakam kadar 0}\end{array}}}$$

$0,\overline{a} = \dfrac{a}{9}$, $0,\overline{ab} = \dfrac{ab}{99}$, $0,a\overline{bc} = \dfrac{abc-a}{990}$,

$0,ab\overline{c} = \dfrac{abc-ab}{900}$, $0,\overline{abc} = \dfrac{abc}{999}$ gibi.

➢ Bir devirli ondalık sayının devreden kısmının son basamağı 9 ise bir önceki basamaktaki sayı 1 artırılır.

$0,34\overline{9} = 0,35$ $\quad 0,3\overline{9} = 0,4$ $\quad 1,\overline{9} = 2$ gibi

1. Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b $\in$ R ve $a \neq 0$ olmak üzere;

ax + b = 0 biçimindeki ifadelere "x'e bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem" denir.

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ denklemin köküdür.

Çözüm kümesi; $Ç = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ şeklinde gösterilir.

ax + b = 0 denkleminin çözümü

Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin çözümü için üç durum vardır.

1. $a \neq 0$ ve $b \in R$ ise $Ç = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ dır.

2. a = 0 ve $b \neq 0$ ise Ç = ∅ dir.

3. a = 0 ve b = 0 ise Ç = R dir.

➢ P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere,

$$\boxed{P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0 \;\text{ veya }\; Q(x) = 0)}$$

➢ P(x) ve Q(x) polinomlarında $x \in R$ olmak üzere,

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ tipindeki denklemlere rasyonel denklemler denir.

$$\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0 \;\text{ ve }\; Q(x) \neq 0)}$$

➢ P(x) = 0 eşitliğini sağlayan Q(x) = 0 eşitliğini **sağlamayan** $x \in R$ sayıları rasyonel denklemin kökleridir. Yani **paydayı sıfır yapan değerler kök olarak alınamazlar.**

1. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c $\in$ R (a≠0, b≠0)olmak üzere ax + by + c = 0 biçiminde ifade edilen denklemlere **birinci dereceden x ve y'ye bağlı iki bilinmeyenli denklem** denir. Birinci dereceden bir denklem analitik düzlemde bir doğru belirtir.

$a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \in R$ olmak üzere,

$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}$ Şeklindeki sisteme birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi denir.

Denklem sistemini çözmek için genelde 2 yöntem kullanırız. Bunlar,

1. Yok etme yöntemi

2. Yerine koyma yöntemi

Birinci Dereceden İki bilinmeyenli Denklem sisteminin Çözüm Kümesi:

$ax + by + c = 0 \ldots d_1$

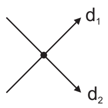
$dx + ey + f = 0 \ldots d_2$

denklem sistemini göz önüne alalım:

Bu iki denklemin her birinin düzlemde bir doğru belirttiği göz önüne alınırsa **üç durum** olduğu görülür.

Birinci durum:

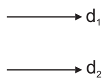
$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise, bu iki doğru tek bir noktada kesişir.



Bu durumda, verilen denklem sisteminin çözüm kümesi bir elemanlıdır.

İkinci durum:

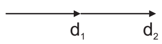
$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise, bu iki doğru paraleldir.



Denklem sistemini sağlayan hiçbir nokta bulunamaz. Bu durumda, verilen denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

Üçüncü durum:

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise



bu iki doğru çakışıktır.

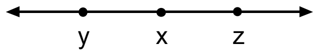
Doğru üzerindeki her nokta denklem sistemini sağlar.

Bu durumda, verilen denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz sayıda elemandan oluşur.

Eşitsizlikler

Reel sayıları <, ≤, >, ≥ sembolleriyle karşılaştırmaya reel sayıların eşitsizliği denir.

Reel sayı ekseninde herhangi bir sayı sağında bulunan sayıdan küçük, solunda bulunan sayıdan büyüktür. Yani;



$x > y$ ve $x < z$ şeklinde gösterilip x büyüktür y den ve x küçüktür z den diye okunur.

$x \neq y$ olmak üzere $\quad x > y \Rightarrow x - y > 0$

$x < y \Rightarrow x - y < 0$ dır.

Eğer $\quad x.y < 0 \Rightarrow$ x ile y ters işaretlidir.

$x.y > 0 \Rightarrow$ x ile y aynı işaretlidir.

Özellikler

1. Eşitsizliğin her iki tarafına aynı reel sayı eklenebilir ya da her iki tarafından aynı reel sayı çıkarılabilir.

$z \in R$ ve $x < y \Rightarrow x \pm z < y \pm z$

$3 < 5 \Rightarrow 3 + 2 < 5 + 2 \quad 5 < 7$

$3 - 2 < 5 - 2 \quad 1 < 3$

2. Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir reel sayıyla çarpıldığında veya bölündüğünde eşitsizlik değişmez.

$z > 0$ ve $x < y \Rightarrow x.z < y.z$

$z > 0$ ve $x < y \Rightarrow \frac{x}{z} < \frac{y}{z}$

$4 > 2 \Rightarrow 4.3 > 2.3, \quad 12 > 6$

$4 > 2 \Rightarrow \frac{4}{2} > \frac{2}{2}, \quad 2 > 1$

3. Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir reel sayıyla çarpıldığında veya bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirir.

$z < 0$ ve $x < y \Rightarrow x.z > y.z$

$z < 0$ ve $x < y \Rightarrow \frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

$4 > 2 \Rightarrow 4.(-2) < 2.(-2), \quad -8 < -4$

$4 > 2 \Rightarrow \frac{4}{(-2)} < \frac{2}{(-2)}, \quad -2 < -1$

4. $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$ dir.

$3 < 5$ ve $5 < 7 \Rightarrow 3 < 7$

5. Aynı yönlü iki eşitsizlik taraf tarafa toplanabilir.

$\left.\begin{matrix} x < y \\ z < k \end{matrix}\right\}$ ise, $x + z < y + k$

$\left.\begin{matrix} 2 < 3 \\ 4 < 5 \end{matrix}\right\}$ ise, $2 + 4 < 3 + 5 \quad 6 < 8$

6. Özel olarak $0 < a < b$ ve $0 < c < d$ olmak üzere

$0 < a.c < b.d$ dir.

$\left.\begin{matrix} 3 < x < 5 \\ 4 < y < 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12 < x.y < 30$

7. Sıfır ile bir arasındaki sayıların üssü büyüdükçe sayı küçülür.

$n \in Z^+$ olmak üzere

$x^n < x^{n-1}$ ise, $0 < x < 1$ dir.

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

8. $0 < x < y$ için

a. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ dir. $\quad 0 < 2 < 3 \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

b. $x^n < y^n, \ n \in N^+$

9. $x < y < 0$ için

a. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ dir. $\quad \frac{1}{-4} > \frac{1}{-3}$

b. n çift sayma sayısı ise

$x^n > y^n, \ (-4)^2 > (-3)^2$

n tek sayma sayısı ise

$x^n < y^n, \ (-4)^3 < (-3)^3$

10. $x, y \in R$, $0 < x < y < 1$ ise,

a. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 1 \quad , \quad \frac{1}{\frac{1}{3}} > \frac{1}{\frac{1}{2}} > 1 \quad , \quad 3 > 2 > 1$

b. $0 < \frac{x}{y} < 1 \qquad 0 < \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} < 1 \qquad 0 < \frac{2}{3} < 1$

c. $\frac{y}{x} > 1 \qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} > 1 \qquad \frac{3}{2} > 1$

Aralıklar

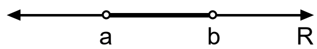
$a, b \in R$ ve $a < b$ olsun.

1. $[a,b] = \{x \mid x \in R \ \text{ve} \ a \le x \le b\}$ dir.

[a, b] ye kapalı aralık denir.

2. $(a,b) = \{x \mid x \in R \ \text{ve} \ a < x < b\}$ dır.

(a, b) ye açık aralık denir.



3. $[a,b) = \{x \mid x \in R \ \text{ve} \ a \le x < b\}$ dır.
$(a,b] = \{x \mid x \in R \ \text{ve} \ a < x \le b\}$ dır.

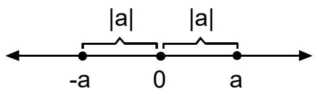
[a, b) ve (a, b] ye yarı açık (veya yarı kapalı) aralık denir.

[a,b)

(a,b]

Mutlak Değer

Sayı doğrusu üzerindeki bir a reel sayısının başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir ve |a| ile gösterilir.



Yani $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ dır.

Mutlak değer içindeki ifade pozitif ise aynen, negatif ise önüne (–) yazılarak mutlak değer dışına çıkarılır.

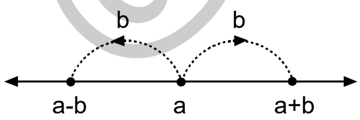
$|2| = 2,\ |-2| = -(-2) = 2$ gibi.

Özellikler

1. $a > 0$ ise $|a| = a$
2. $a < 0$ ise $|a| = -a$
3. $|-a| = |a|$ ve $|a-b| = |b-a|$
4. $|a.b| = |a|.|b|$
5. $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$
6. $|x| = a \Rightarrow x = a$ veya $x = -a$ dır. $(a \in R^+)$
7. $\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)|$
8. $|x| \geq 0$

Mutlak Değerli Denklemler

b ≥ 0, a, b ∈ R ve x bilinmeyen olmak üzere sayı ekseni üzerinde $|x-a| = b$ denkleminin anlamı: **a noktasına olan uzaklığı b birim olan noktalar** dır.



1. $|x-a| = b$ denklemi çözülürken sayı ekseni üzerinde a noktası işaretlenir ve b birim (b ≥ 0) solda ve sağda bulunan noktalar belirlenir.
(x = a + b ; x = a – b)

➢ Denklem çözülürken x – a = b ve x – a = – b alınarak kökler x = a + b ve x = a – b bulunabilir.

O halde Ç = {a + b, a – b} dir.

➢ x bir değişken a ve b birer reel sayı olmak üzere

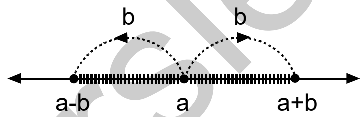
$|x-a|+|x-b|$ ifadesinin en küçük değeri $a \leq x \leq b$ koşuluna uyan bir x değeri için bulunan sonuçtur.

$|x-a|-|x-b|$ ifadesinin en küçük değeri x = a için, en büyük değeri ise x = b için bulunan sonuçtur.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

b ≥ 0, a, b ∈ R ve x bilinmeyen olmak üzere sayı ekseni üzerinde;

I. $|x-a| \leq b$ eşitsizliğinin anlamı: **a noktasına olan uzaklığı b birim ve b birimden küçük olan noktalardır.**

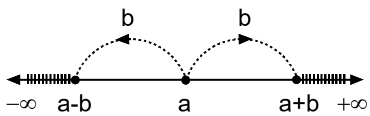


$|x-a| \leq b$ eşitsizliği çözülürken üstte anlattığımız sıra takip edilir ve kapalı aralık alınır.

Ç = [a – b, a + b] dir.

$|x-a| \leq b$ eşitsizliği çözülürken $-b \leq x-a \leq b$ çözülerek $a-b \leq x \leq a+b$ yazmak da doğrudur.

II. $|x-a| \geq b$ eşitsizliğinin anlamı: **a noktasına olan uzaklığı b birim ve b birimden büyük olan noktalardır.**



$|x-a| \geq b$ eşitsizliği çözülürken üstte anlattığımız sıra takip edilir ve x ≥ a + b veya x ≤ a – b bulunur.

$|x-a| \geq b$ eşitsizliği çözülürken, $(x-a \geq b,\ x-a \leq -b)$ eşitsizliği x için çözülerek, $(x \geq a+b$ veya $x \leq a-b)$ elde edilebilir.

Kısaca eşitsizlik çözümü yapılırken şu özellikler kullanılır.

1. $|f(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a \quad a \in R^+$
2. $|f(x)| \geq a \Rightarrow f(x) \geq a$ veya $f(x) \leq -a$
3. $a < |f(x)| \leq b \Rightarrow a < f(x) < b$ veya $-b < f(x) < -a$
4. $|f(x)| = |g(x)|$ $(|f(x)| \leq |g(x)|)$ şeklindeki ifadelerde her iki tarafın taraf tarafa karesi alınarak çözülür.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c $\in$ R ve a $\neq$ 0 iken $ax^2+bx+c=0$ denklemine ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Kökleri x_1 ve x_2 olan denklemin köklerinin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi denir.

$ax^2+bx+c=0$ denklemi için

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

(diskriminant) durumunu incelersek,

1. $\Delta > 0$ ise farklı iki reel kök vardır.

$$\boxed{x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

2. $\Delta = 0$ ise, kökler eşittir.

[Kökler iki katlı, çözüm kümesi bir elemanlı, çakışık iki köklü, tam kare, olarak da kullanılır.]

$$\boxed{x_1=x_2=-\frac{b}{2a}}$$

3. $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur. (Kökler sanaldır.)

Kök – Katsayı Bağıntıları

$\Delta > 0$ iken

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ise

- $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=-\dfrac{b}{c}$
- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$
- $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{(x_1.x_2)^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$
- $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
- $ax^2+bx+c=0$

  denkleminin simetrik iki kökünün olması için b = 0 ve a.c $\leq$ 0 olmalıdır.

  $(x_1+x_2=0$ olur.)

Kökleri Bilinen İkinci Dereceden Denklemi Yazma

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklem;

$(x-x_1).(x-x_2)=0$ veya $x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0$

dır.

$x_1+x_2=T$ ve $x_1.x_2=Ç$ olarak gösterirsek denklem;

$\boxed{x^2-T.x+Ç=0}$ biçiminde yazılabilir.

➢ Rasyonel katsayılı 2.dereceden bir denklemin köklerinden biri $p-\sqrt{q}$ ise diğeri $p+\sqrt{q}$ denir.

➢ $a_1x^2+b_1x+c_1=0$
$a_2x^2+b_2x+c_2=0$

Denklemlerinin;

I. Birer kökü ortak ise

x^2'li ifadeler yok edilecek şekilde taraf tarafa toplanır. Buradan bulunan x değeri denklemlerin ortak köküdür.

II. İkişer kökleri eşitse,

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ dir.

➢ $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Kökleri (mx_1+n) ve (mx_2+n) olan 2. dereceden denklemi bulmak için $ax^2+bx+c=0$ denkleminde x yerine $\dfrac{x-n}{m}$ yazılır.

Köklü Denklemler

Bir denklemde kök içerisinde bilinmeyen varsa bu denkleme köklü denklem denir. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ biçimine getirilerek eşitliğin her iki yanının kök kuvveti alınır ve kökten kurtarılır. Elde edilen yeni denklem çözülerek kökler bulunur.

Kök kuvveti çift olan köklü denklemlerde, bulunan x değerleri denklemin kökü olmayabilir. Sağlamayan köke "yalancı kök" denir ve çözüm kümesine <u>dahil edilmez</u>.

Birinci Dereceden Bir Değişkenli Eşitsizlikler

$a \neq 0 \quad a, b \in R \quad f(x) = ax + b$ fonksiyonunun işaretini incelemek için,

1. $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ (kök bulunur)

2.

x	$-\infty$ x=-b/a	$+\infty$
f(x)=ax+b	a nın işareti ile TERS	a nın işareti ile AYNI
	T	A

Tablo yapılır ve yukarıdaki gibi işaret incelenir.

3. $ax + b > 0, \; ax + b \geq 0, \; ax + b < 0, \; ax + b \leq 0$ eşitsizliklerinden hangisi soruluyorsa tablo sonucu kullanılarak yanıtlanır.

İkinci Dereceden Bir Değişkenli Eşitsizlikler

$ax^2 + bx + c > 0, \; ax^2 + bx + c \geq 0, \; ax^2 + bx + c < 0,$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ eşitsizliklerini incelemek için

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun işareti incelenir.

1. $\Delta > 0$ ise, 2 reel kök vardır. Tablo:

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
f(x)=ax^2+bx+c	a nın işareti ile AYNI	a nın işareti ile TERS	a nın işareti ile AYNI
	A	T	A

2. $\Delta = 0$ ise, kökler eşit. Tablo:

x	$-\infty$ $x_1=x_2$	$+\infty$
f(x)=ax^2+bx+c	a nın işareti ile AYNI	a nın işareti ile AYNI
	A	A

3. $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur. Tablo:

	$-\infty$ $+\infty$
f(x)=ax^2+bx+c	a nın işareti ile AYNI
	A

1. $\forall x \in R$ için $ax^2 + bx + c > 0$ istendiğinde,
$\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.

2. $\forall x \in R$ için $ax^2 + bx + c < 0$ istendiğinde,
$\Delta < 0$ ve $a < 0$ olmalıdır.

➢ $\dfrac{P(x).Q(x).T(x)}{R(x)}$

şeklinde bir ifadenin işareti incelenirken,

- Her çarpan veya bölenin kökleri bulunur.
- Kökler – ∞ dan + ∞ a doğru küçükten büyüğe sıralanır. Sonra P(x), Q(x), T(x), R(x) in büyük dereceli terimleri alınır ve çarpılır.
- Sonuç (+) ise, tablo en sondan (+) ile başlar [(–) ise tablo sondan (–) ile başlar.] ve kökten sonra işaret değişir. [Çift katlı köklerde işaret değişmez.] (Payda kökleri çözüme dahil edilmez)

Üslü Sayılar

$a \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere "n" tane a sayısının birbiriyle çarpımı a^n'dir.

$$a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{n\ tane}$$

a^n ifadesinde a'ya taban, n'ye kuvvet ya da üs denir.

➢ Sıfır hariç her sayının sıfırıncı kuvveti 1'dir.

$x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$

Sıfırın sıfırıncı kuvveti belirsizdir.

$0^0 \rightarrow$ Belirsiz

➢ 1 in tüm kuvvetleri birdir.

$(1)^n = 1$

➢ -1 in çift kuvvetleri bir, tek kuvvetleri eksi birdir.

$(-1)^{2n} = 1 \qquad (-1)^{2n-1} = -1$

$(-1)^{1999} = -1 \qquad (-1)^{2000} = 1$

$$\boxed{a^b = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \ \text{ ve } \ a \neq 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \ \text{ ve } \ b : \text{çift sayı} \end{cases}}$$

➢ Bir reel sayının negatif kuvveti alındığında o sayının pozitif kuvvetinin çarpmaya göre tersi elde edilir.

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad (x \neq 0)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m, \quad (x \neq 0 \ \text{ ve } \ y \neq 0)$$

➢ Bütün sayıların birinci kuvvetleri kendilerine eşittir.

➢ Pozitif sayıların tüm kuvvetleri pozitiftir.

➢ Negatif sayıların ise tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri pozitiftir.

$a \in R$ ve $n \in Z$ için

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \qquad \left(-a^{2n}\right) = -a^{2n}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}, \qquad \left(-a^{2n-1}\right) = -a^{2n-1}$$

Not:

Negatif sayıların çift kuvvetlerinde kuvvetin parantezin içinde mi dışında mı olduğuna dikkat edilmelidir.

$-2^4 \neq (-2)^4$

Toplama – Çıkarma

➢ Tabanları ve üsleri aynı olan ifadelerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

$a.x^n + bx^n - c.x^n = (a + b - c) . x^n$

Çarpma

Çarpma işlemi için 2 durum vardır.

i) Tabanları aynı üsleri farklı ise aynı tabanda yazılıp üsleri toplanır. $x \in R$, n, m, $\in Z$ için

$$\boxed{x^m.x^n = x^{m+n}}$$

ii) Tabanları farklı üsleri aynı ise tabanlar çarpılır, ortak üs yazılır. x, $y \in R$, $n \in Z$ için

$$\boxed{x^n.y^n = (x.y)^n}$$

➢ Bir üslü sayının kuvvetinin kuvveti var ise aynı tabanda kuvvetler çarpılır.

$x \in R^+$ ve n, m, $\in Z$ için $\left(x^n\right)^m = \left(x^m\right)^n = x^{m.n}$ dir.

Bölme

Bölmede iki durum vardır.

i) Tabanları aynı üsleri farklı olan ifadelerde ortak taban aynı yazılır payın kuvvetinden paydanın kuvveti çıkartılarak üs olarak yazılır.

$x \in R$, $x \neq 0$, m, $n \in Z$ için $\boxed{\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$ dir.

ii) Tabanları farklı, üsleri aynı olan ifadeler bölünürken tabanlar bölüm olarak alınır, ortak kuvvet üs olarak yazılır.

x, $y \in R$, $y \neq 0$, $m \in Z$ için $\boxed{\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m}$

Üslü Denklemler

1. $x \in R - \{-1, 0, 1\}$ ve $x^m = x^n$ ise, m = n dir.

2. $m \in Z$, $x, y \in R - \{-1, 0, 1\}$ için $x^m = y^m$ olsun

a. m tek ise x = y

b. m çift ise x = y veya x = – y dir.

3. $x^y = 0$ ise, x = 0 dır. ($y \neq 0$ olmak üzere)

Üslü Sayılarda Eşitsizlik

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ ve } a > 1 \text{ ise, } f(x) < g(x)$$
$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ ve } 0 < a < 1 \text{ ise, } f(x) > g(x)$$

Köklü Sayılar

$n \in N+$ olmak üzere, $x^n = a$ denklemini sağlayan x sayısına a'nın n. dereceden kökü denir. $\sqrt[n]{a}$ biçiminde gösterilir.

$\sqrt[n]{a}$ ifadesi

i) n tek ise; daima reel sayı belirtir.

ii) n çift ise; $a \geq 0$ için reel sayı belirtir ve $\sqrt[n]{a} \geq 0$ dır.

- $\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|}$
- $\boxed{\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a}$
- $\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}}$

Kök derecesini genişletme, sadeleştirme:

$k \in Z^+$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n.k]{x^{mk}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}} \qquad \left(\frac{n}{k} \in N^+\right)$$

Not:

$\sqrt[n]{x^m}$ ifadesinde n tek ve kök içi negatif ise çift sayıyla genişletme yapılamaz.

Toplama veya Çıkarma

Kök dereceleri ve kök içleri aynı ise katsayılar toplanır veya çıkarılır.

$\boxed{a\sqrt[m]{p} - b\sqrt[m]{p} + c\sqrt[m]{p} = \sqrt[m]{p}\,(a - b + c)}$ dir.

Çarpma

i) Kök dereceleri eşit ise kök içleri çarpılır.

$\boxed{\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}}$

$\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27}$ gibi

ii) Kök içleri eşit ise önce üslü sayıya çevrilir. (yada kök dereceleri eşitlenir.)

Köklü İfadenin Eşleniği

- $\sqrt[n]{a}$ nın eşleniği $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ dir.

$\sqrt{5}$ in eşleniği $\sqrt{5^{2-1}} = \sqrt{5}$ tir.
$\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5$
$\sqrt[3]{5}$ in eşleniği $\sqrt[3]{5^{3-1}} = \sqrt[3]{5^2}$ dir.
$\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5^2} = 5$ tir.

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ nin eşleniği $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ dir.
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ nin eşleniği $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ dir.

Not:

$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ ve $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ nin eşleniklerini bulmak için

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ve

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ özdeşliklerinden faydalanılır.

$$(\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}).(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a.b} + \sqrt[3]{b^2})$$

Bölme

Pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılır.

Özellikler:

1. $\boxed{a \in R^{+} \text{ ise, } a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}}$

$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3.5} = \sqrt[3]{40}$

2. $\boxed{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p.q]{a}}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

3. $\boxed{\sqrt[p]{a^m \sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[p.q]{a^{mq}.a^n}}$ ve $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[n.m.k]{a}}$

$\sqrt[3]{2^2 \sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8.2^5}} = \sqrt[12]{2^{13}}$

4. $\boxed{\sqrt[n]{A.\sqrt[n]{A.\sqrt[n]{A...}}} = \sqrt[n-1]{A}}$

$\sqrt[4]{32.\sqrt[4]{32...}} = \sqrt[4-1]{32} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3.2^2} = 2.\sqrt[3]{4}$

5. $\boxed{\sqrt[n]{A:\sqrt[n]{A:\sqrt[n]{A:...}}} = \sqrt[n+1]{A}}$

$\sqrt[4]{32:\sqrt[4]{32:\sqrt[4]{32...}}} = \sqrt[4+1]{32} = \sqrt[5]{32} = 2$

6. $\sqrt{A+\sqrt{A+\sqrt{A...}}} = x$ ve
$A = m.(m+1)$ ise $x = m+1$ dir.

$\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42...}}} = 7$

7. $\boxed{\sqrt{A-\sqrt{A-\sqrt{A...}}} = x \text{ ve } A = m.(m+1) \text{ ise } x = m}$

$\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20...}}} = 4$

8. $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ ifadesinde çarpımları b ve toplamları a olan iki sayı x_1 ve x_2 ise, yani $x_1.x_2 = b$ ve $x_1 + x_2 = a$ oluyorsa

$\boxed{\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \left|\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}\right|}$ dir.

Çarpanlara Ayırma

Sabit bir polinomdan başka çarpanı bulunmayan polinoma asal polinom denir.

$2x+7,\ x^2+3,\ x-2,\ x^2+16$ birer asal polinomdur.

Bir polinomu asal polinomların çarpımı biçiminde yazmaya polinomu çarpanlara ayırmak denir.

$2x+6 = 2.(x+3)$
$x^2+x = x(x+1)$
$x^2-4 = (x-2)(x+2)$ dir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

1. Ortak Parantez Almak:

Katsayıların OBEB'i ile ortak çarpanların <u>en küçük</u> üslüsü parantezine alınarak çarpanlara ayrılır.

$(x+y)^2 - 5(x+y) = (x+y)(x+y-5)$ gibi

2. Gruplandırarak Ortak Paranteze Almak:

Verilen ifadelerin terimleri uygun şekillerde (ikili, üçlü gibi) gruplara ayrılır ve ayrılan gruplarda ortak çarpan varsa ortak çarpan parantezine alınır.

$\underbrace{ax-bx}_{\text{I.grup}} + \underbrace{ay-by}_{\text{II.grup}} = x(a-b)+y(a-b)$

$= (a-b)(x+y)$ gibi

3. Özdeşliklerden Yararlanılarak Çarpanlara Ayırma

➢ **İki kare farkı** $\boxed{x^2-y^2 = (x-y)(x+y)}$

➢ **Küp Farkı Toplamı**
$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

➢ $\boxed{x^n - y^n = (x-y).(x^{n-1}+x^{n-2}.y+x^{n-3}.y^2+...+y^{n-1})}$

n tek doğal sayı ise,

➢ $\boxed{x^n + y^n = (x+y).(x^{n-1}-x^{n-2}.y+x^{n-3}.y^2-...+y^{n-1})}$

➢ Tam Kare Şeklindeki İfadeler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab-ac-bc)$$

Not:

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n} \text{ dir. } (n \in Z)$$
$$(a-b)^{2n-1} = -(b-a)^{2n-1} \text{ dir. } (n \in Z)$$

➢ Küp Şeklindeki İfadeler

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

➢ (a ± b)^n nin açılımındaki katsayılar için Pascal Üçgeni

n = 0 için 1

n = 1 için 1 1

n = 2 için 1 2 1

n = 3 için 1 3 3 1

n = 4 için 1 4 6 4 1

....

4. x^2 + Bx + C biçimindeki üç terimli ifadelerin çarpanlara ayrılması

Eğer çarpımları C yi, toplamları da B yi veren iki sayı bulabiliyorsak (yani C=a.b ve B=a+b gibi),

ifadeyi (x+a). (x+b) şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz.